Fußballtippbewertung

Wilfried Hausmann (wilfried@hausmann-bn.de)

Sommer 2016

Kapitel 1

Die Tordistanz und die Schrittdistanz

Gesucht ist eine sinnvolle Definition für den Abstand zwischen zwei Spielständen $i_1 : i_2$ (der Ist-Spielstand I) und $t_1 : t_2$ (ein weiterer Spielstand, z.B. das getippte Ergebnis T) ohne bewertende Berücksichtigung der Tendenz (Sieg/Unentschieden/Niederlage).

Definition 1 *Die **Tordistanz (TD)** der beiden Spielstände ist definiert durch*

$$TD = TD\,(I, T) = |i_1 - t_1| + |i_2 - t_2| + |(i_1 - i_2) - (t_1 - t_2)|$$

Es ist klar, dass die Tordistanz immer eine nichtnegative ganze Zahl ist. Ferner gilt offensichtlich

$$TD = 0 \Longleftrightarrow (i_1, i_2) = (t_1, t_2)$$

Es soll nun die Frage untersucht werden, wie sich TD bei Veränderungen des Spielstands ändert. Hierzu betrachten wir möglichst geringe Veränderungen des Spielstands, die wir **kleine Veränderungen** nennen werden. Hierzu gehören **Torereignisse** (ein Tor wird erzielt oder aberkannt) und **kleine Parallelshifts** (beide Mannschaften schießen je ein Tor oder beiden wird je ein Tor aberkannt). Kleine Parallelshifts erfordern zwar zwei Torereignisse, ändern aber wertungsmäßig weniger als Torereignisse, die sozusagen die atomaren Spielstandsveränderungen sind. Insofern kann man beide Typen von Veränderungen als *kleine* Veränderungen ansehen - mit unterschiedlicher Begründung. Man beachte, dass die Umkehrung (= Rückgängigmachung) einer kleinen Veränderung ebenfalls eine kleine Veränderung ist.

Proposition 2 *Eine kleine Veränderung des Spielstands I lässt die Tordistanz zwischen I und T unverändert oder ändert sie um ± 2. Umgekehrt lassen* *sich 2 Spielstände mit $TD = 2$ durch eine kleine Veränderung des Spielstands ineinander überführen.*

Das folgt daraus, dass jede kleine Veränderung einen der Summanden der Definition unverändert lässt und jeden der anderen beiden Summanden um 1 erhöht oder senkt.

Entscheidend ist nun:

Lemma 3 *In jeder Konstellation mit $TD \neq 0$ gibt es eine kleine Veränderung von I, die TD um 2 senkt.*

Beweis. Fallunterscheidung. a) $i_1 < t_1$ und $i_2 \geq t_2$. Dann senkt ein Tor für Mannschaft 1 bei Spielstand I die Tordistanz zu T.
b) $i_1 \geq t_1$ und $i_2 < t_2$. Dann bewirkt ein Tor für Mannschaft 2 das Gewünschte.
c) $i_1 < t_1$ und $i_2 < t_2$. Hier hilft ein Tor für Mannschaft 1 zusammen mit einem für Mannschaft 2.
d) $i_1 > t_1$ und $i_2 > t_2$. Mannschaft 1 und Mannschaft 2 ist jeweils ein Tor abzuerkennen.
e) $i_1 > t_1$ und $i_2 = t_2$. Mannschaft 1 ist ein Tor abzuerkennen.
f) $i_1 = t_1$ und $i_2 > t_2$. Mannschaft 2 ist ein Tor abzuerkennen. ■

Für Torereignisse allein ist die Behauptung des Lemmas falsch und nur mit kleinen Parallelshifts kommt man auch nicht immer hin. Somit ergibt sich:

Satz 4 *Die Tordistanz $TD\,(I,T)$ ist immer eine gerade Zahl, ihre Hälfte ist die minimale Anzahl kleiner Veränderungen, die nötig ist, um den Spielstand I in den Spielstand T zu überführen.*

Beweis. Nach dem Lemma ist es bei ungleichen Spielständen immer möglich, die Tordistanz durch eine kleine Veränderung um 2 zu verringern. Fährt man so fort, so muss dieser Prozess irgendwann mit einer Zahl < 2 enden. Diese Zahl kann nur die Null sein, da sonst noch ein weiterer Schritt möglich wäre, der zu einem negativen Wert führen würde, was nicht möglich ist. Und $TD = 0$ bedeutet, dass die beiden Spielstände identisch sind. ■

Es ist daher sinnvoll zu definieren:

Definition 5 *Die* ***Schrittdistanz*** *SD zweier Spielstände I und T ist definiert durch*

$$SD(I,T) := \frac{1}{2} TD\,(I,T)$$

Konstruiert man eine Folge von Spielständen $I_0 = I$, I_1,...,$I_n = T$ zu I und T mit $SD(I,T) = n$ wie im Satz, so nimmt bei jedem Schritt $j \to j+1$ die Schrittdistanz zu T um 1 ab und gleichzeitig die Schrittdistanz zu I um 1 zu (das folgt aus der Dreiecksungleichung, s. u.). Es ist also so, als würde man geradewegs in gleich großen Schritten von I nach T gehen (wobei es allerdings mehrere solcher Verbindungsgeraden geben kann).

Beispiel 6 *Die folgenden Tabellen zeigen den Übergang von 2:0 in 4:3 (*$SD = 3$*) und den von 4:2 in 3:5 (*$SD = 4$*):*

2	:	*0*
3	:	*1*
4	:	*2*
4	:	*3*

4	:	*2*
4	:	*3*
4	:	*4*
3	:	*4*
3	:	*5*

SD (und auch schon TD) ist eine Metrik auf dem Raum der möglichen Spielstände $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ...), wobei man definiert:

Definition 7 *M sei eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Abbildung*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

*eine **Metrik**, wenn gilt:*
1.) Für alle x, y ist $d(x,y) \geq 0$.
2.) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
3) Für alle x, y ist $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie).
4.) Für alle x, y, z gilt: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).
*Eine Menge M zusammen mit einer Metrik heißt **metrischer Raum**.*

Dass SD diese Forderungen erfüllt, folgt entweder direkt aus der Definition und den hergeleiteten Eigenschaften (für die Dreiecksungleichung gehe man zuerst vom Spielstand x zum Spielstand z und dann vom Spielstand z zum Spielstand y über) oder auch daraus, dass $(i_1, i_2) \mapsto (i_1, i_2, i_1 - i_2)$ die Menge der Spielstände $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in den $\mathbb{R}^3$ einbettet, so dass TD mit der Metrik der 1-Norm übereinstimmt ($\|(a,b,c)\|_1 = |a| + |b| + |c|$).

Satz 8 *Die Schrittdistanz SD ist die einzige ganzzahlige Metrik (d.h. Abstände sind stets ganzzahlig) auf dem Raum der Spielstände, unter der Zustände, die sich durch genau eine kleine Veränderung unterscheiden, den Abstand 1 haben.*

Beweis. Der Beweis erfolgt per Induktion über die Schrittdistanz n. Der Induktionsanfang $n = 1$ wurde schon oben gezeigt. Jetzt sei zu $n_0 \in \mathbb{N}$ schon nachgewiesen, dass zu zwei Spielständen I, T mit $SD(I, T) \leq n_0$ zwangsweise $d(I, T) = SD(I, T)$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung und der Ganzzahligkeit folgt, dass das dann auch für Spielstände I, T mit $SD(I, T) = n_0 + 1$ gilt. Denn es gibt ja wie gezeigt einen Zustand I_{n_0} mit $SD(I, I_{n_0}) = n_0$ und $SD(I_{n_0}, T) = 1$. ■

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit der Schrittdistanz das einzige ganzzahlige Abstandsmaß auf der Menge aller Spielstände gefunden ist,

- das die Unterschiede in den geschossenen Toren gleichermaßen berücksichtigt wie die Unterschiede in der Tordifferenz
- das angibt, wie viele Schritte (kleine Veränderungen) man benötigt, um von einem Spielstand zum anderen zu kommen (insbesondere ist es immer möglich, auf diese Weise von dem einen Zustand zu dem anderen zu gelangen - diese Eigenschaft könnte man **ganzzahlige Vollständigkeit** nennen)
- das die Eigenschaften einer Metrik hat, also die mathematischen Anforderungen an ein Abstandsmaß erfüllt.

Insofern macht es Sinn, einen Tipp mit Schrittdistanz n zum Spielergebnis als näher am Ergebnis anzusehen als ein Tipp mit Schrittdistanz $n+1$, wobei dieses Urteil natürlich von einer etwaigen Nichtübereinstimmung der Tendenz außer Kraft gesetzt wird.

Bemerkung 9 *Wenn es stört, dass zu den kleinen Schritten auch Aberkennungen von Toren gehören: Darauf kann nicht verzichtet werden, denn wie soll man z.B. von 1:1 zu 0:0 kommen, ohne Tore abzuerkennen. Ohne negative Tore kann man aber mit der gleichen Anzahl Schritte insgesamt von den beiden Spielständen zu einem dritten kommen, wie es die folgende Tabelle zu dem zweiten Beispiel oben zeigt:*

4	:	2	3	:	5
4	:	3	3	:	5
4	:	4	3	:	5
4	:	4	4	:	5
4	:	5	4	:	5

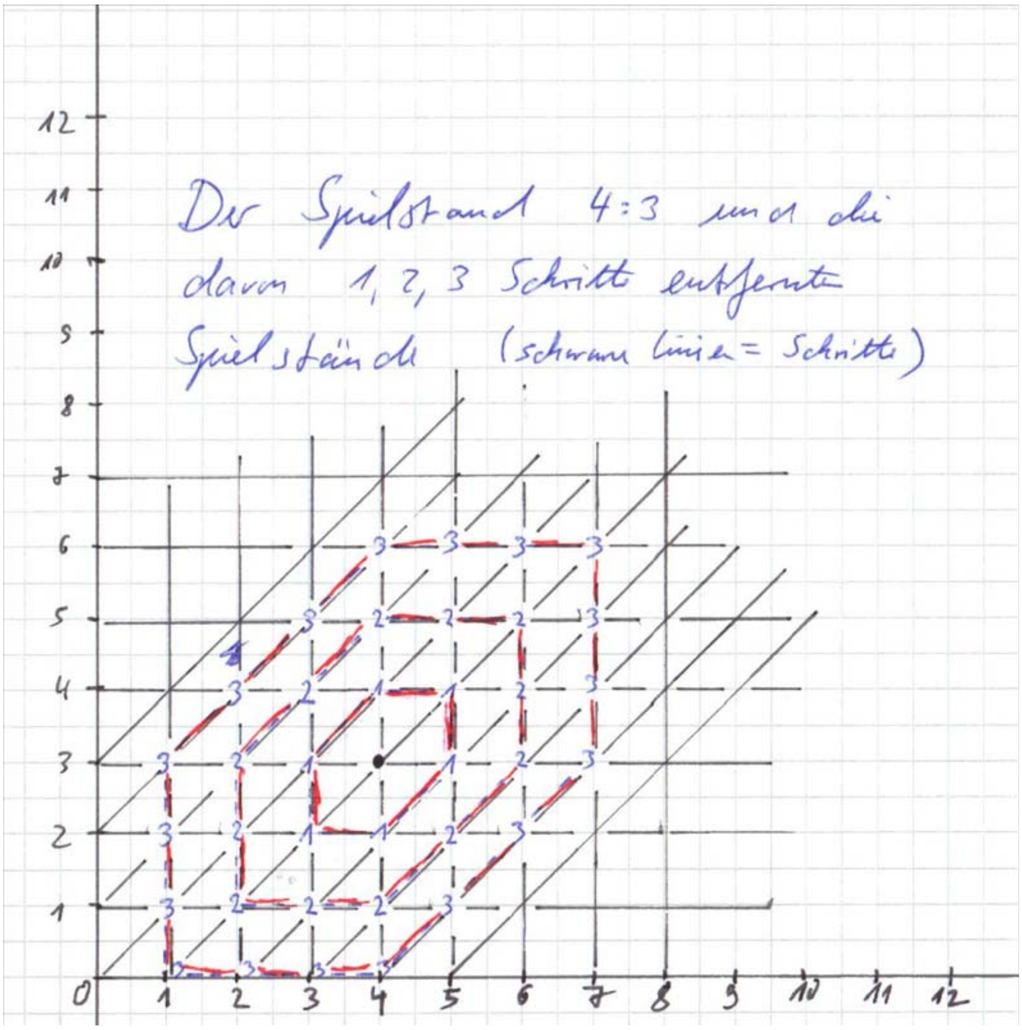

Abbildung 1.1:

Kapitel 2

Bewertungssysteme

2.1 Anforderungen

Ein **Bewertungssystem** ist eine Abbildung F, die jeder Kombination eines Spielstands I mit einem Tipp T (also jedem Paar von Spielständen) eine Punktzahl $F(I,T)$ zuordnet. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Bewertungssysteme mit einem **Träger** $n \in \mathbb{N}$. Das soll bedeuten, dass

$$F(I,T)\begin{cases} > 0 & falls \quad SD(I,T) \leq n \\ = 0 & sonst \end{cases}$$

(Diese Einschränkung ist nicht unbedingt erforderlich, aber in der Praxis zweckmäßig). Es geht jetzt darum, welche Anforderungen man an ein solches Bewertungssystem stellen sollte. Hierbei spielen die im letzten Abschnitt betrachteten Übergange zwischen Spielständen eine wichtige Rolle. Diese Übergänge nennen wir Wege:

Definition 10 *Ein **Weg** zwischen zwei Spielständen I und T mit Schrittdistanz $SD(I,T) = m$ besteht aus einer Folge $S_0 = I$, ..., $S_m = T$ mit $SD(S_i, S_{i+1}) = 1$ für $i = 0$, ...,$m-1$.*

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, existiert immer ein Weg, er ist häufig aber nicht eindeutig. Zu einem Weg kann man die Folge der Punktzahlen $F(S_0, S_{m-j})$ $(j = 0,...,m)$ betrachten. Diese Folge nennen wir eine **Tipp_zu_Ergebnis-Annäherung** (**TzE-Annäherung**). Hierbei sollte die Punktzahl steigen, denn der Tipp nähert sich mit wachsendem j immer mehr dem Ergebnis.

Definition 11 *Ein Bewertungssystem mit Träger n heißt **konsistent**, wenn für jeden Weg zwischen zwei Spielständen I und T mit $SD(I,T) = m \leq n$*

die zugehörige TzE-Annäherung streng monoton steigend ist:

$$F(I,T) = F(I,S_m) < F(I,S_{m-1}) < ... < F(I,S_1) < F(I,S_0) = F(I,I)$$

Umgekehrt kann man auch den Tipp festlassen und das Ergebnis dagegen wandern lassen, also die Folge

$$F(I,T) = F(S_0,S_m), F(S_1,S_m), ..., F(S_{m-1},S_m), F(S_m,S_m)$$

betrachten. Eine solche Folge nennen wir **Ergebnis_zu_Tipp-Annäherung** (**EzT-Annäherung**). Bei einem richtigen Tipp durchläuft die Folge der (Bewertungen der) Zwischenstände eine von $F(0:0, Tipp)$ ausgehende EzT-Annäherung.

Definition 12 *Ein Bewertungssystem mit Träger n heißt* ***treu****, wenn für jeden Weg zwischen zwei Spielständen I und T mit $SD(I,T) = m \leq n$ die zugehörige EzT-Annäherung streng monoton steigend ist:*

$$F(I,T) = F(S_0,T) < F(S_1,T) < ... < F(S_m,T) = F(T,T)$$

Wenn ein Bewertungssystem treu ist, so ist garantiert, dass man immer mit dem abgegebenen Tipp als Ergebnis am besten fährt, d.h. der eigene Tipp ist immer das Ergebnis, das die meisten Punkte bringt.

Konsistenz und Treue sind Eigenschaften, die ein gutes Bewertungssystem haben sollte. Ein einfaches solches System mit Träger n liefert jede endliche Folge

$$b_0 > b_1 > ... > b_n > 0,$$

indem man festsetzt

$$F(I,T) = \begin{cases} b_{SD(I,T)} & falls \quad SD(I,T) \leq n \\ 0 & sonst \end{cases} .$$

2.2 Basissystem und Bonus

Ein Bewertungssystem wie am Ende des letzten Abschnittes wollen wir **Basissystem** mit Bewertungszahlen b_0, b_1, ..., b_n nennen. Ein solches System mit $n = 3$ liefert z.B. die Bewertungsfolge

$$b_0 = 3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,5 \text{ und } b_3 = 0,25$$

die in den Beispielen unten mehrfach benutzt wird. Bei den folgenden Überlegungen geht es darum, wie ein Basissystem durch ein Bonussystem ergänzt werden kann, so dass bestimmte Tipps attraktiver werden. D.h. anstelle von $F(I,T)$ wird eine Konstellation (I,T) mit

$$F(I,T) + Bon\,(I,T)$$

bewertet. Dabei wird aber immer davon ausgegangen, dass es ein Basissystem gibt und grundsätzlich auch gewünscht ist, dass dieses System die Bewertung von Tipps maßgeblich prägt. Dies ist nicht ganz leicht in eine formale Regel umzusetzen. Plausibel ist aber, die Größe von $Bon\,(I,T)$ in Relation zu $F(I,T)$ zu begrenzen. Z.B kann man verlangen:

Behauptung 13 $0 \leq Bon(I,T) \leq F(I,T)$, *insbesondere ist* $F(I,T) = 0$ *in Kombination mit* $Bon(I,T) > 0$ *kritisch zu sehen.*

Ferner sollten - und das ist unmittelbarer einsichtig - durch das Bonussystem nicht die im letzten Abschnitt aufgestellten Anforderungen aufgeweicht werden, d.h. es sollte weiterhin gelten:

Behauptung 14 *Das Bewertungssystem, das* (I,T) *den Wert* $F(I,T) + Bon\,(I,T)$ *zuordnet, muss konsistent und treu sein.*

Eine einfache Möglichkeit, ein Bonussystem zu definieren, ist, $Bon(I,T)$ abhängig vom Tipp und der Schrittdistanz (also tippbezogen) zu vergeben:

$$Bon(I,T) = bon(T, SD(I,T))$$

So können ganz direkt bestimmte Tipps gefördert werden, z.B. Tipps mit vielen Toren. Ein solches System ist treu, wenn die Folge der Bewertungszahlen

$$b_0 + bon(T,0), ..., b_n + bon(T,n)$$

streng monoton fallend ist. Denn jede EzT-Annäherung hat die gleichen Werte wie in einem Basissystem (über jeden zugehörigen Weg bleibt die erste Komponente von $(T, SD(I,T))$ konstant und die zweite nimmt immer jeweils um 1 ab).Nicht ganz so leicht ist die Konsistenz nachzuweisen. Denn bei einer TzE-Annäherung kann theoretisch bei jedem Schritt die Formel für den Bonus wechseln. Man muss daher alle möglichen Übergänge (einzelne Schritte) überprüfen. Das soll anhand eines Beispiels erläutert werden: Das am Anfang des Abschnitts vorgestellte Basissystem soll um die folgende tippbezogene Bonusregelung erweitert werden:

- Zur Belohnung mutiger torreicher Tipps soll ein Bonus in Höhe der Bewertung des Basissystems gewährt werden, wenn für (mindestens) ein Mannschaft 4 Tore getippt werden. Ist das nicht der Fall, werden aber für mindestens 1 Mannschaft 3 Tore getippt, so soll immerhin noch die Hälfte dieser Punkte als Bonus gewährt werden.

Dieses System ergibt also die Bewertung:

$$F(I,T)+Bon\,(I,T) = \begin{cases} 3 \quad 1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}25 & \begin{array}{c}\text{je nach SD}\\ \text{falls 2 oder weniger Tore}\\ \text{je Mannschaft getippt}\end{array} \\[2ex] 4{,}5 \quad 1{,}5 \quad 0{,}75 \quad 0{,}375 & \begin{array}{c}\text{je nach SD}\\ \text{falls 3 die höchste}\\ \text{getippte Torzahl ist}\end{array} \\[2ex] 6 \quad 2 \quad 1 \quad 0{,}5 & \begin{array}{c}\text{je nach SD}\\ \text{falls 4 die höchste}\\ \text{getippte Torzahl ist}\end{array} \end{cases}$$

Die Pfeile in der folgenden Grafik zeigen die vorkommenden Übergänge:

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{SD} & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\[2ex]
\text{Basis} & 3 & \begin{array}{c}\longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 1 & \begin{array}{c}\longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 0{,}5 & \begin{array}{c}\longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 0{,}25 \\[2ex]
\text{Max=3 Tore} & 4{,}5 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 1{,}5 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 0{,}75 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\\ \swarrow\end{array} & 0{,}375 \\[2ex]
\text{Max}\geq\text{4 Tore} & 6 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\end{array} & 2 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\end{array} & 1 & \begin{array}{c}\nwarrow\\ \longleftarrow\end{array} & 0{,}5
\end{array}$$

Da alle Pfeile von niedrigeren auf höhere Werte zeigen (der direkte Übergang von 2 auf 4 Tore ist nicht möglich), ist das Bewertungssystem also konsistent.

Bemerkung 15 *Man beachte aber, dass nicht für alle Wege die gleichen Bewertungen vorkommen. Z.B. sind*

$$4:2 \rightarrow 3:2 \rightarrow 2:2 \rightarrow 2:3$$

und

$$4:2 \rightarrow 4:3 \rightarrow 3:3 \rightarrow 2:3$$

Wege von 4:2 zu 2:3, die als TzE-Annäherungen zu den Folgen

$$0,5 \rightarrow 0,75 \rightarrow 1 \rightarrow 4,5$$

bzw.

$$0,5 \rightarrow 1 \rightarrow 1,5 \rightarrow 4,5$$

führen. Als EzT-Annäherungen erhält man natürlich für beide Wege die gleichen Werte:

$$0,375 \to 0,75 \to 1,5 \to 4,5$$

Alternativ zu den tippbezogenen Boni kann man auch ergebnisbezogene Boni verteilen, d.h. dann ist der Bonus eine von Ergebnis und Schrittdistanz abhängige Größe:

$$Bon(I,T) = bon(I, SD(I,T))$$

Durch die folgende Festlegung kann man z.B. die Anforderung

- *Torreiche Ergebnisse (z.B. 4:3) sind schwerer exakt zu tippen als torarme Ergebnisse (1:0). Tut man es trotzdem, muss das belohnt werden.*

umsetzen (Basissystem wie oben):

$$F(I,T)+Bon\,(I,T) = \begin{cases} 3 \quad 1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}25 & \text{je nach SD} \\ & \text{falls 2 oder weniger Tore} \\ & \text{je Mannschaft fallen} \\ 4{,}5 \quad 1{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}25 & \text{je nach SD} \\ & \text{falls 3 die höchste} \\ & \text{Torzahl einer Mannschaft ist} \\ 6 \quad 2 \quad 1 \quad 0{,}25 & \text{je nach SD} \\ & \text{falls eine Mannschaft 4} \\ & \text{oder mehr Tore schießt} \end{cases}$$

Indirekt belohnt es auch dieses Bonussystem, wenn man im Zweifelsfall eher viele Tore tippt, aber es ist restriktiver, da der Bonus einen kleineren Träger hat.

Die Anforderungen von Konsistenz und Treue führen zu ähnlichen Bedingungen wie bei den tippbezogenen Boni. Hier ist es aber so, dass die Konsistenz streng monoton fallende Zeilen (s. Def. oben) erfordert und die Treue garantiert ist, wenn in der folgenden Grafik alle Pfeile auf größere Werte zeigen:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{SD} & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\
\\
\text{Basis} & 3 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & 0{,}5 & \longleftarrow & 0{,}25 \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
\text{Max=3 Tore} & 4{,}5 & \longleftarrow & 1{,}5 & \longleftarrow & 0{,}5 & \longleftarrow & 0{,}25 \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 & & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
\text{Max}\geq 4 \text{ Tore} & 6 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & 0{,}25
\end{array}
$$

2.3 Die Tendenz

Die bisher ausgeklammerte Tendenz (Sieg/Unentschieden/Niederlage) wird häufig mit einer positiven Konstanten bewertet (z.B. 2), wenn sie richtig getroffen wird. Es stellt sich die Frage, ob ein konsistentes und treues System diese beiden Eigenschaften behält, wenn man eine solche Belohnung der richtigen Tendenz einführt.

Lemma 16 *A,B und C seien Spielstände, m sei eine positive natürliche Zahl. Es gelte*

$$SD(A,C) = m,\ SD(A,B) = 1,\ SD(B,C) = m - 1$$

Falls dann A die gleiche Tendenz wie C hat, so hat auch B diese Tendenz.

Beweis. Sind A und C unentschiedene Spielstände (A=a:a), so sieht man leicht durch Durchprobieren aller maximal 6 Möglichkeiten, dass ein B mit den geforderten SD-Werten nur von der Form (a+1):(a+1) oder (a-1):(a-1) sein kann.
Sind A und C keine unentschiedenen Spielstände, so sind es oBdA Sieg-Spielstände. Damit A überhaupt einen Nachbarzustand mit anderer Tendenz hat, muss A von der Form (a+1):a sein. Dann sind aber auch nur die beiden Unentschieden-Spielstände (a+1):(a+1) und a:a solche Nachbarzustände. Damit ein solcher Zustand B eine kleinere Schrittdistanz zu C hat als A, muss die Tordifferenz näher an der Tordifferenz von C liegen (eine positive ganze Zahl) als die von A (+1). ■

Es ergibt sich, dass jede (EzT- oder TzE-)Annäherung irgendwann im Laufe des Weges die Tendenz des Zielergebnisses annimmt und ab da immer beibehält, woraus folgt:

Satz 17 *Ein konsistentes und treues Bewertungssystem behält diese Eigenschaften, wenn man bei richtig getippter Tendenz dafür zusätzlich ein feste Punktzahl erhält.*

Das entstehende Bewertungssystem hat dann aber natürlich keinen endlichen Träger mehr.